UNIVERSIDAD SAN PEDRO

VICERRECTORADO ACADÉMICO

ESCUELA DE POSGRADO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

# El modelo Polya y las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo 2015

Tesis para obtener el Grado Académico de Maestro en Educación con mención en Docencia Universitaria y Gestión Educativa

**Autor: Melgarejo Malpaso, José Filverto**

Asesor: Dr. Ángeles Morales, Julio César

**Huaraz – Perú**
**2018**

# Índice

**Palabras clave**:

| | | |
|---|---|---|
| Tema | Modelo Polya | Model Polya |
| Especialidad | Competencias  Matemáticas | Mathematical Competitions |

**Línea de investigación**

**Área:** Ciencias Sociales

**Sub área:** Ciencias de la Educación.

**Disciplina:** Educación General

**Línea de Investigación**: Didáctica para el proceso de enseñanza aprendizaje

**Título**:

**“**EL MODELO POLYA Y LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES DE IV CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PÚBLICA N° 86651 DE ONGO 2015**”**

## Resumen

El propósito de la investigación es conocer si el modelo Polya mejora las competencias matemáticas en los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo.

El estudio es de tipo cuantitativo y de diseño pre experimental de un solo grupo que se aplicó una prueba evaluativa inicial denominada pre test, la cual midió el nivel de resolución de problemas. Luego se trabajó con el modelo Polya centrado en la resolución de problemas con el grupo. Finalmente se aplicó una evaluación llamada post test la cual permitió medir las diferencias significativas en la resolución de problemas y en el logro de las competencias matemáticas.

La investigación que pretendió determinar los efectos de la aplicación del modelo Polya en el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo 2015. Se trabajó con un solo grupo de estudiantes.

Los resultados obtenidos en el nivel de logro En Inicio de 0 – 10, 6 estudiantes que constituye el 42.9% en el pre test se ha reducido a 0.0% en el post test. En el nivel de logro En proceso de 11 - 12 se mantiene el porcentaje tanto en pre test como en el post test con 14.3%. Asimismo, en el nivel de Logro Previsto de 13 - 16 también se mantiene con 35.7% en el pre test como en el post test. Finalmente, en el nivel de logro destacado de 17 – 20 ha mejorado de un 7.1 % en el pre test a 50.0 % en el post test. Asimismo, el promedio de 12.0% en el pre test se incrementó a 16.7% en el post test, lo que constituye que es un método adecuado para la enseñanza de las matemáticas con una prueba de homogeneidad de 7.664.

## Abstract

The purpose is to know if the pattern Polya improves the mathematical competitions in the students of IV cycle of Primary Education of the Public Educational Institution N° 86651 of Ongo.

The study is of quantitative type and of design experimental pre of a single group that a test evaluativa initial denominated pre test was applied, which measured the level of resolution of problems. Then one worked with the pattern Polya centered in the resolution of problems with the group. Finally an evaluation was applied called post test which allowed to measure the significant differences in the resolution of problems and in the achievement of the mathematical competitions.

The investigation that sought to determine the effects of the application of the pattern Polya in the achievement of the mathematical competitions of the students of IV cycle of Primary Education of the Public Educational Institution N° 86651 of Ongo 2015. One worked with a single group of students.

The results obtained in the achievement level In Beginning of 0 - 10, 6 students that it constitutes 42.9% in the pre test have decreased to 0.0% in the one post test. In the achievement level In process of 11 - 12 stay the percentage as much in pre test as in the one post test with 14.3%. Also, in the level of Foreseen Achievement of 13 - 16 also stay with 35.7% in the pre test like in the one post test. Finally, in the level of outstanding achievement of 17 - 20 have improved of 7.1% in the pre test to 50.0% in the one post test. Also, the average of 12.0% in the pre test was increased to 16.7% in the one post test, what constitutes that it is an appropriate method for the teaching of the mathematics with a test of homogeneity of 7.664.

# I. Introducción

Para realizar el presente trabajo de investigación se tuvieron en cuenta las siguientes tesis como:

Escalante. (2015) Estudio realizado en Quetzaltenago – Guatemala con estudiantes de quinto primaria, sección "A", de la Escuela Oficial Rural Mixta "Bruno Emilio Villatoro López", municipio de La Democracia, departamento de Huehuetenango, Guatemala sobre el Método Pólya en la Resolución de Problemas Matemáticos. Su objetivo fue determinar los procesos que aplica el Método Pólya en la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de quinto grado primaria de la Escuela Oficial Rural Mixta "Bruno Emilio Villatoro" del municipio de la Democracia, departamento de Huehuetenango, Guatemala C.A. El objetivo principal en matemática es analizar e interpretar los resultados del planteamiento de un problema y con el apoyo del método Pólya se evidencia el aprendizaje de los estudiantes, así como el logro de competencias propuestas, también la capacidad de razonar del alumno que no sea repetitivo o mecánico de una teoría, que sea capaz de descubrir y facilitar el uso de estrategias que coadyuven en la resolución de problemas o todo aquello que necesita solución. La metodología de la presente investigación es cuantitativa, este enfoque es un proceso secuencial y probatorio que usa la recolección de datos con base en la medición numérica y el análisis estadístico para establecer patrones de aprendizaje. Presenta un diseño cuasi-experimental, Los **resultados** fueron: El método Pólya dentro de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática refleja una respuesta significativa y efectiva en el aprendizaje, porque al finalizar la investigación se obtuvo una media aritmética de 88.48 puntos calificación que se compara con los 62.2 que fue la media aritmética obtenida por los estudiantes en la evaluación diagnóstica.

Martínez (2012) realizaron un estudio en México sobre Resolución de Problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de educación primaria, cuyo propósito de estudio son: investigar las estrategias y las representaciones externas que hacen los niños al resolver problemas aditivos, diseñar una secuencia didáctica que integre tipos y sub-tipos de problemas aditivos para trabajar con los niños de 2° grado de educación primaria y verificar la viabilidad de la secuencia. La metodología usada es cualitativa de tipo descriptivo explicativo. Los **resultados** a que llegó en el presente trabajo: la estrategia que más utilizaron los niños en la resolución de los problemas de estructura aditiva fue el uso adecuado del algoritmo 64%, seguida de uso equivocado del algoritmo 14% ; la estrategia del complemento que era una de las privilegiadas en la primera etapa, pasó a ser una de las menos utilizadas 9% ; dos estrategias que no tuvieron en la primera etapa, surgieron en ésta: uso del cálculo mental 4% y otra 9%. A partir de los porcentajes obtenidos se observa que la mayoría de los niños se han apropiado del uso adecuado del algoritmo y los que no, siguen en proceso de consolidación.

Bahamonde y Vicuña (2011) realizaron un estudio de investigación en Punta Arenas, Chile titulado Resolución de Problemas Matemáticos, con el objetivo de incrementar los niveles cognitivos de análisis, pensamiento lógico y reflexivo en los estudiantes, aumentando su habilidad para resolver problemas en el área de matemática, cuyo resultado alcanzado es la siguiente: en los cuadros comparativos se observa que la totalidad de los cursos presentan variaciones positivas, lo que traduce en un avance en cada una de las variables. Específicamente en la variable comprensión de los problemas se observa que incrementa el porcentaje en cada uno de los grupos: en el primero básico 67,7%, asimismo en el tercero básico 61,8%

Bastiand (2012) realizó una tesis en Lima – Perú sobre Relación entre comprensión lectora y resolución de problemas matemáticos en estudiantes de sexto grado de primaria de las instituciones educativas públicas del Concejo Educativo Municipal de La Molina – 2011, con el objetivo de determinar la relación que existe entre la comprensión lectora y la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de sexto grado de primaria de las Instituciones Educativas Públicas del Concejo Educativo Municipal de La Molina en el año 2011. La investigación es de tipo descriptivo porque se mide las características más importantes en cada uno de los indicadores de las variables de estudio y correlacional porque se halla la relación que supuestamente existe entre las dos variables del problema, resolución de problemas matemáticos y comprensión de lectura, en la muestra de estudio. El diseño es transversal porque se aplican los instrumentos de investigación a la muestra de estudio para observar las dos variables, en un determinado momento, y sólo en uno y es no experimental porque se hace referencia a un tipo de investigación en la cual el investigador no introducirá ninguna variable experimental en la situación que se va a estudiar. Es decir, no se manipula deliberadamente ninguna variable independiente para conocer sus efectos en la variable dependiente, sino que la situación ya está dada y solamente se va a recoger y medir tales efectos en la realidad. Y llegó a la siguiente conclusión: En la prueba de comprensión de lectura, los alumnos se ubican en un nivel de "logro previsto" con una nota de 13.8; en comprensión literal, también se ubican en un nivel de "logro previsto" con una nota de 14.8, y de la misma manera, en comprensión inferencial, con una nota de 13.

**Teóricamente la investigación se fundamenta tomando información referente a:**

### Modelo de Polya

George Polya nació en Budapest Hungría el 13 de diciembre de 1887. Durante su infancia no encontró las matemáticas especialmente interesantes; comenzó en la universidad de Budapest estudios universitarios de leyes, y se cambió después a lenguajes y literatura, durante los cuales, como parte de un curso de filosofía, escogió matemáticas, y ahí comienza su relación con las mismas. Se doctoró en matemáticas en 1912 en Budapest, con una tesis sobre probabilidad. Hizo trabajos postdoctores en Göttingen y París y encontró un trabajo como profesor en el Instituto de Tecnología de Zurich (Suiza), donde continuó hasta 1940, en que emigró como otros cientos de intelectuales europeos a Estados Unidos. Trabajó primero en la universidad de Palo alto y luego en la de Stanford. Escribió 11 libros entre ellos destaca "Como plantear y Resolver Problemas"

El modelo Polya se basa en las observaciones que había hecho como profesor de matemática y en la obra de algunos psicólogos. Consta de cuatro etapas que dirigen la acción de quien se enfrenta a un problema, con el fin de ayudarlo a eliminar las discrepancias entre el objeto del problema y la solución de éste: comprender el problema, concebir el plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. (Polya, 1972, p.28).

Es necesario formular una serie de preguntas en la dirección del proceso de solución de un problema.

**Comprender el problema**: Para comprender el problema se hace necesario dirigir la reflexión sobre: (Polya, 1989, p.19).

¿De qué trata el problema? ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?, ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿Es insuficiente?, ¿Redundante?, ¿Contradictoria?

Es tonto el contestar a una pregunta que no se comprende. Es deplorable trabajar para un fin que no se desea. Sin embargo, tales errores se cometen con frecuencia dentro y fuera de la escuela. El maestro debe tratar de evitar que se produzcan en su clase. El alumno debe comprender el problema. Pero no solo debe comprenderlo, sino también debe desear resolverlo. Si hay falta de comprensión o de interés por parte del alumno, no siempre es su culpa; el problema debe escogerse adecuadamente, ni muy difícil ni muy fácil y debe dedicarse un cierto tiempo a exponerlo de un modo natural e interesante.

Ante todo, el enunciado verbal del problema debe ser comprendido. El maestro puede comprobarlo, hasta cierto punto, pidiéndole al alumno que repita el enunciado, lo cual deberá poder hacer sin titubeos. El alumno deberá también poder separar las principales partes del problema, la incógnita, los datos, la condición. Rara vez puede el maestro evitar las preguntas: ¿cuál es la incógnita?; ¿Cuáles son los datos?; ¿Cuál es la condición?

El alumno debe considerar las principales partes del problema atentamente, repetidas veces y bajo diversos ángulos. Si hay alguna figura relacionada al problema, debe dibujar la figura y destacar en ella la incógnita y los datos. Es necesario dar nombres a dichos elementos y por consiguiente introducir una notación adecuada; poniendo cuidado en la apropiada elección de los signos, está obligado a considerar los elementos para los cuales los signos deben de ser elegidos. Hay otra pregunta que puede plantearse en este momento, con tal de que no se espere una respuesta definitiva, sino más bien provisional o una mera conjetura: ¿Es posible satisfacer la condición? (Polya, 1989, p. 28).

El comprender el problema está dividido en dos partes: “familiarizarse” y trabajar para una mejor comprensión. (Polya, 1989, p.51).

- Familiarizarse con el problema: ¿Por dónde debo empezar? Empiece por el enunciado del problema.

¿Qué puedo hacer? Trate de visualizar el problema como un todo, tan claramente como pueda. No se ocupe de los detalles por el momento.

¿Qué gano haciendo esto? Comprenderá el problema, se familiarizará con é1, grabando su propósito en su mente. La atención dedicada al problema puede también estimular su memoria y prepararla para recoger los puntos importantes.

- Trabajar para una mejor comprensión: ¿Por dónde debo empezar? Empiece de nuevo por el enunciado del problema. Empiece cuando dicho enunciado resulte tan claro y lo tenga tan bien grabado en su mente que pueda usted perderlo de vista por un momento sin temor de perderlo por completo.

¿Qué puedo hacer? Aislar las principales partes del problema. La hipótesis y la conclusión son las principales partes de un "problema por demostrar"; la incógnita, los datos y las condiciones son las principales partes de un "problema por resolver". Ocúpese de las partes principales del problema, considérelas una por una, reconsidérelas, considérelas después combinándolas entre sí estableciendo las relaciones que puedan existir entre cada detalle y los otros y entre cada detalle y el conjunto del problema.

¿Qué gano haciendo esto? Está usted preparando y aclarando detalles que probablemente entrarán en juego más tarde.

**Concebir un plan**: En la segunda etapa, las reflexiones encaminadas a concebir el plan, deben centrarse en: (Polya, 1989, p.19).

- ¿Cómo resolveremos el problema? ¿Qué deberíamos hacer primero? ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿o ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

- ¿Conoce algún problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.

- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizarse resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?

- ¿Podría enunciar el problema de otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las funciones.

- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En que qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que estén más cercanos entre sí?

- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted las nociones esenciales concernientes al problema?

Tenemos un plan cuando sabemos, al menos a "grosso modo", qué cálculos, qué razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita. De la comprensión del problema a la concepción del plan, el camino puede ser largo y tortuoso. De hecho, lo esencial en la solución de un problema es el concebir la idea de un plan. Esta idea puede tomar forma poco a poco o bien, después de ensayos aparentemente infructuosos y de un periodo de duda, se puede tener de pronto una "idea brillante". Lo mejor que puede hacer el maestro por su alumno es conducirlo a esa idea brillante ayudándole, pero sin imponérsele. Las preguntas y sugerencias de las que vamos a hablar, tienen por objeto provocar tales ideas.

Para comprender la posición del alumno, el maestro debe pensar en su propia experiencia, en sus propias dificultades y éxitos en la resolución de problemas.

Sabemos, claro está, que es difícil tener una buena idea si nuestros conocimientos son pobres en la materia, y totalmente imposible si la desconocemos por completo. Las buenas ideas se basan en la experiencia pasada y en los conocimientos adquiridos previamente. Un simple esfuerzo de memoria no basta para provocar una buena idea, pero es imposible tener alguna sin recordar ciertos hechos pertinentes a la cuestión. Los materiales por sí solos no permiten la construcción de una casa, pero es imposible construir una casa in juntar los materiales necesarios. Los materiales necesarios para la solución de un problema de matemáticas son ciertos detalles particulares de conocimientos previamente adquiridos, tales como problemas resueltos teoremas demostrados. Por ello es con frecuencia adecuado abordar un trabajo planteándose la siguiente pregunta: ¿Conoce algún problema relacionado?

La dificultad estriba en que hay por lo general una infinidad de problemas que se relacionan de alguna manera con el que nos ocupa, es decir, que tienen ciertos puntos en común con é1. ¿Cómo escoger entre tantos, aquel o aquellos que puedan ser realmente útiles? Una sugerencia nos va a permitir descubrir un punto común esencial: Mire bien la incógnita. Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.

Si llegamos a recordar algún problema ya resuelto que esté estrechamente relacionado con nuestro problema actual, podemos considerarnos con suerte. Debemos tratar de merecer tal suerte y podemos merecerla sabiéndola explotar. He aquí un problema relacionado con el suyo y ya resuelto. ¿Puede usted hacer uso de él?

Las preguntas anteriores, bien comprendidas y seriamente examinadas, ayudan muchas veces a provocar el encadenamiento correcto de las ideas; pero no siempre es el caso, ya que no son fórmulas mágicas. Nos hace falta entonces buscar otro punto de contacto y explorar los diversos aspectos de nuestro problema. Debemos cambiar, transformar o modificar el problema. ¿Puede enunciarse el problema en forma diferente? Ciertas cuestiones de nuestra lista sugieren medios específicos para variar el problema, tales como la generalización, la particularización, el empleo de la analogía, el descartar una parte de la condición, y así por el estilo. Todos estos detalles son importantes, una modificación del problema puede conducirnos a algún otro problema auxiliar apropiado: si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema relacionado con él.

Al tratar de utilizar otros problemas o teoremas que ya conocemos, considerando las diversas transformaciones posibles, experimentando con diversos problemas auxiliares, podemos desviarnos y alejarnos de nuestro problema primitivo, al grado de correr el riesgo de perderlo totalmente de vista. Aquí una buena pregunta nos puede conducir de nuevo a él: ¿Ha empleado todos los datos? ¿A hecho uso de toda la condición? (Polya, 1989, p.31)

**Ejecución del plan**: Para la ejecución del plan (Polya, 1989, p.19). Compruebe cada uno de los pasos, al ejecutar su plan de la solución.

- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Poner en pie un plan, concebir la idea de la solución, ello no tiene nada de fácil. Hace falta, para lograrlo, el concurso de toda una serie de circunstancias: conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración y, lo que, es más, buena suerte. Es mucho más fácil llevar al cabo el plan. Para ello lo que se requiere sobre todo es paciencia.

El plan proporciona una línea general. Nos debemos de asegurar que los detalles encajan bien en esa línea. Nos hace falta, pues, examinar los detalles uno tras otro, pacientemente, hasta que todo esté perfectamente claro, sin que quede ningún rincón oscuro donde podría disimularse un error.

Si el alumno ha concebido realmente un plan, el maestro puede disfrutar un momento de una paz relativa. El peligro estriba en que el alumno olvide su plan, lo que puede ocurrir fácilmente si lo ha recibido del exterior y lo ha aceptado por provenir de su maestro. Pero si él mismo ha trabajado en el plan, aunque un tanto ayudado, y si ha concebido la idea final con satisfacción, entonces no la perderá tan fácilmente. No obstante, el profesor debe insistir en que el alumno verifique cada paso.

Podemos asegurarnos de la exactitud de un paso de nuestro razonamiento ya sea “por intuición” o por medio de una "demostración formal”

Podemos concentrarnos sobre el punto en cuestión hasta que lo veamos tan claro que no nos quede duda alguna sobre la exactitud de dicho detalle. También, podemos esclarecer el punto que nos interesa operando por deducción y ateniéndonos a reglas formales.

Lo esencial es que el alumno honestamente esté por completo seguro de la exactitud de cada paso. En ciertos casos, el profesor puede recalcar sobre la diferencia que hay entre "ver" y "demostrar": ¿pueden ustedes ver claramente que el paso es correcto?; pero ¿pueden también demostrar que es correcto? (Polya, 1989, p.33).

¿Por dónde debo empezar? Empiece por la feliz idea que le conduce a la solución. Empiece cuando esté seguro de tener el correcto punto de partida y esté seguro de poder suplir los detalles menores qué pueden necesitarse.

¿Qué puedo hacer? Asegúrese de que tiene la plena comprensión del problema. Efectúe en detalle todas las operaciones algebraicas o geométricas que previamente ha reconocido como factibles. Adquiera la convicción de la exactitud de cada paso mediante un razonamiento formal o por discernimiento intuitivo o por ambos medios, si es posible. Si su problema es muy complejo, usted puede distinguir "grandes" pasos y "pequeños" pasos, estando compuesto cada gran paso de varios pequeños. Compruebe primero los grandes pasos y después considere los menores.

¿Qué gano haciendo esto? Una presentación de la solución para la cual la exactitud y corrección de cada paso no ofrece duda alguna. (Polya, 1989, p.52).

Visión Retrospectiva: Al examinar la solución se indica hacer una visión retrospectiva de lo realizado, proponiendo las preguntas siguientes: (Polya, 1989, p.19).

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe?
- ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Aun los buenos alumnos, una vez que han obtenido la solución y expuesto claramente el razonamiento, tienden a cerrar sus cuadernos y a dedicarse a otra cosa. Al proceder así, omiten una fase importante y muy instructiva del trabajo.

Reconsiderando la solución, reexaminando el resultado y el camino que les condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver problemas. Un buen profesor debe comprender y hacer comprender a sus alumnos que ningún problema puede considerarse completamente terminado. Siempre queda algo por hacer; mediante un estudio cuidadoso y una cierta concentración, se puede mejorar cualquier solución, y en todo caso, siempre podremos mejorar nuestra comprensión de la solución.

El alumno ha llevado al cabo su plan. Ha redactado la solución verificando cada paso de razonamiento. Tiene, pues, buenos motivos para creer que su solución es correcta. No obstante, puede haber errores, sobre todo si el razonamiento es largo y enredado, Por lo tanto, es recomendable verificar. Especialmente si existe un medio rápido e intuitivo para asegurarse de la exactitud del resultado o del razonamiento, no debe uno dejar de hacerlo. ¿Puede verificar el resultado?; ¿puede verificar el razonamiento?

Al igual que para convencernos de la presencia o de la calidad de un objeto, nos gusta verlo y tocarlo, prefiriendo así percibir por medio de dos sentidos diferentes al igual preferimos convencernos por medio de dos pruebas diferentes: ¿Puede obtener el resultado de un modo distinto? Por otra parte, es preferible, naturalmente, un razonamiento corto y simple a uno largo y complicado; ¿Puede verlo de golpe?

Una de las primeras y principales obligaciones del maestro es no dar a sus alumnos la impresión de que los problemas de matemáticas no tienen ninguna relación entre sí, ni con el mundo físico. Al reconsiderar la solución de un problema se nos presenta la oportunidad de investigar sus relaciones. Los alumnos se percatarán que un tal comportamiento es realmente interesante si han hecho un esfuerzo honesto y si tienen la certidumbre de haber hecho las cosas bien. Desearán entonces ver si ese esfuerzo no podría aportarles otro beneficio y saber lo que habría que hacerse para obtener nuevamente un resultado igual de correcto. El profesor debe alentar a sus alumnos a imaginar casos en que podrían utilizar de nuevo el mismo proceso de razonamiento o aplicar el resultado obtenido. ¿Puede utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema? (Polya 1989 p. 35)

¿Por dónde debo empezar? Por la solución, completa y correcta en todos sus detalles.

¿Qué puedo hacer? Considerar la solución desde varios puntos de vista y buscar los puntos de contacto con sus conocimientos previamente adquiridos.

Considere los detalles de la solución y trate de hacerlos tan sencillos como pueda; reconsidérelos más extensamente y trate de condensarlos; trate de abarcar de un vistazo la solución completa. Trate de modificar, en beneficio de ellas, tanto las partes principales como las secundarias; trate de mejorar la solución en su conjunto de tal modo que se adivine por sí misma y que quede grabada, en forma natural, en el cuadro de sus conocimientos previos. Examine atentamente el método que le ha llevado a la solución, trate de captar su razón de ser y trate de aplicado a otros problemas. Examine atentamente el resultado y trate igualmente de aplicarlo a otros problemas.

¿Qué gano haciendo esto? Puede encontrar una solución mejor y diferente, descubrir nuevos hechos interesantes. En todo caso, si toma el hábito de reconsiderar las soluciones y examinarlas muy atentamente, adquiere usted una serie de conocimientos correctamente ordenados, utilizables en cualquier momento, a la vez que desarrolla su aptitud en la resolución de problemas. (Polya, 1989, p.53).

**Otros Modelos para la resolución de problemas**

¿Qué es un problema?

El término Problema admite diversas acepciones; de manera general se le entiende como una situación en la que las cosas que tenemos son diferentes de las que deseamos, para Contreras (1987, citado por González, 1998), considera que una situación constituye un problema cuando dicha situación no es familiar, es decir, cuando la novedad es la característica fundamental de la misma y cuando requiere un tratamiento distinto de una mera aplicación rutinaria. Dicho en términos de ejecución, cuando su resolución necesita deliberación, identificación de hipótesis posibles y comprobación de factibilidad, teniendo que elaborar el individuo unas conductas propias que pongan a prueba sus capacidades de razonamiento autónomo.

En palabras de Carretero y García (1984, p.185 ): Un problema surge cuando queremos conseguir algo y los sistemas que tenemos a nuestra disposición para conseguirlo no nos sirven. Es decir, existe una meta más o menos definida y no existe un camino claro y sencillo que nos conduzca hacia ella. Precisando un poco más la mayoría de los sicólogos consideran que un problema existe cuando hay algún obstáculo entre una situación dada y una situación meta. La existencia de ese obstáculo obliga al sujeto a considerar los posibles caminos que le pueden conducir a la situación meta.

Sintetizando se puede afirmar que existe consenso al considerar un problema como una situación que debe superarse y cuya solución no está directamente al alcance, y que dicha situación estará determinada por la edad, el nivel escolar o intelectual, el entorno escolar y familiar y la experiencia previa de la persona.

Gabucino (2005, p.153) nos propone los siguientes componentes básicos en la constitución de un problema: “a) cuando queremos ir desde una situación actual a una situación deseada, b) creemos disponer de los recursos para lograrlo y, c) no nos resulta inmediatamente obvio cómo aplicar los recursos para alcanzar la meta, por lo que debemos idear medios para lograrlo.”

**Resolución de problemas matemáticos.**

Historia:

Pérez (2006) describe que los egipcios a lo largo de toda la historia eran puntales en cobrar ciertos impuestos a cada agricultor de acuerdo al área laborada en dicho plano o tierra. Esto significaba que cada faraón tenía que calcular con frecuencia ciertos porciones de tierra, y para dar solución a problemas prácticos surgieron las primeras fórmulas matemáticas.

La Historia de la resolución de problemas de matemática está vinculada a la historia de la matemática. Puede hacerse esta afirmación desde cuatro puntos de vista:

- Algunos problemas están en el origen del desarrollo de las Matemáticas; desde el comienzo de la historia, la especie humana ha luchado por comprender las leyes fundamentales del mundo físico. Todas las sociedades del mundo durante miles de años descubrieron que existía una disciplina que les permitía acceder más que las demás a ciertos entendimientos sobre la realidad subyacente del mundo físico.

- La resolución de ciertos problemas ha motivado la aparición de nuevas ramas de las Matemáticas; se basa en las normas, lenguajes con que fue escrito el universo desde el despertar hasta los temas más sofisticados de la realidad.

- Otros problemas han provocado rupturas epistemológicas; deslumbrantes descubrimientos que lograron comprender los patrones y secuencias naturales.

- Hay problemas que han abierto crisis en los fundamentos de las Matemáticas; los conceptos, el espacio y la cantidad; comprender la matemática hace la diferencia entre la vida y la muerte.

- En algún momento el hombre empezó a idear que podía contar, medir, relacionar y ordenar el mundo que lo rodeaba; con todo esto se despierta el interés en resolver problemas matemáticos por más de 500 años atrás.

**Definición:**

El término resolución de problemas ha sido usado con diversos significados, que van desde trabajar con ejercicios rutinarios hasta hacer matemática profesionalmente.

En los últimos años, se ha estudiado ampliamente la resolución de Problemas como fuente de aprendizaje de las Matemáticas y desarrollador de competencias, donde las características de la población estudiantil actual han motivado a planificar e investigar las diversas formas de conceptualizar y manejar los procesos matemáticos por medios más prácticos y aplicados a situaciones de la vida real. Cómo resultado a ésta inquietud, se han desarrollado estudios, los cuales seguidamente se comentarán a grandes rasgos, en torno a la resolución de problemas y por supuesto se han trazado políticas educativas cuyo interés final ha sido el mejoramiento del nivel académico en los estudiantes.

La estrategia de resolución de problemas implica crear un contexto donde los datos guarden cierta coherencia, lo cual la hace más significativa que la aplicación mecánica de un algoritmo.

En forma sencilla podría decirse que la resolución de problemas consiste en hallar una respuesta adecuada a las exigencias planteadas, pero realmente la solución de un problema no debe verse como un logro final, sino como todo un complejo proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental, debe implicar un análisis de la situación ante la cual se halla, en la elaboración de hipótesis y la formulación de conjeturas; en el descubrimiento y selección de posibilidades, en la puesta en práctica de métodos de solución, entre otros.

Las situaciones problemáticas son corrientes en la vida de las personas, los estudiantes se ven enfrentados frecuentemente a resolver problemas, pero ¿qué es un problema? (Polya, en su libro Mathematical Discovery - capitulo 5), afirma que un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata.

Otra definición, parecida a la de Polya es la de Krulik y Rudnik: Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma (Krulik y Rudnik, 1980 en Cortez y Galindo 2006 p 20 y 21)

**Modelo de Schoenfeld para la resolución de problemas.**

Schoenfeld (1985), inspirado en las ideas de Polya, diseña uno de los modelos más completos, sobre todo en estrategias heurísticas.

En este modelo distingue también cuatro fases: análisis, exploración, ejecución y comprobación.

Las acciones a realizar en la fase de análisis son.

- Trazar un diagrama si es posible.
- Examinar casos particulares:
- Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema.

- Examinar casos límites para explorar la gama de posibilidades.
- Asignar a los parámetros enteros que puedan figurar la secuencia de valores 0, 1,2... y busca una pauta inductiva.
- Probar o simplificar el problema.
- Sacando partida de posibles simetrías o, mediante razonamientos.

Las acciones en la fase de exploración se deben:

- Examinar problemas esencialmente equivalentes:
- Por sustitución de las condiciones por otras equivalentes.
- Por recombinación de los elementos del problema de distintos modos.
- Introduciendo elementos auxiliares.
- Replanteando el problema mediante:
- Cambio de perspectiva o de notación.
- Considerando el razonamiento por contradicción o el contra- recíproco.

Suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuáles serían sus propiedades.

- Examinar problemas ligeramente modificados:
- Elegir sub objetivos (satisfacción parcial de las condiciones)
- Relajar una condición y tratar de volver a imponerla.
- Descomponer el problema por caso y estudiar caso por caso.
- Examinar problemas ampliamente modificados:
- Construir problemas análogos con menos variables.
- Mantener fijas todas las variables menos una para determinar qué efecto tiene esa variable.
- Tratar de sacar partido de problemas afines respecto a la forma, los datos o las conclusiones.
- Recordar que al manejar problemas afines más fáciles se debería sacar partido, tanto del resultado, como del método de resolución.

En la comprobación de la solución obtenida se indica: - ¿Verifica la solución obtenida los criterios específicos siguientes? - ¿Utiliza todos los datos pertinentes? - ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables? - ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala? - ¿Verifica los criterios generales siguientes? - ¿Es posible obtener la misma solución por otro método? - ¿Puede quedar concretada en casos particulares? - ¿Es posible reducirla a resultados conocidos? - ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

**Modelo de Fridman para la resolución de problemas**

En el texto "Metodología para enseñar a los estudiantes del nivel superior a resolver problemas de matemática" de L. M. Fridman, se ofrece un modelo con las siguientes etapas: análisis del problema, escritura esquemática del problema, búsqueda del plan de solución, ejecución del plan de solución, prueba del plan de solución, investigación del problema, formulación de la respuesta al problema y análisis final de la solución del problema. (Fridman, 1993, p.36) Caracterización breve de esas etapas. Análisis del problema. Lo primero que hay que hacer al recibir un problema, es entender de qué problema se trata, cuáles son sus condiciones y cuáles sus exigencias. El análisis de un problema se puede realizar con diferente grado de profundidad. La profundidad del análisis depende fundamentalmente de sí ya conocemos el tipo de problema al que pertenece el problema que estamos analizando, y de sí conocemos el método general de solución de dicho tipo de problema. Si esto es así, entonces es suficiente un análisis simple que se reduce a identificar el tipo de problema; si no, entonces es necesario un análisis más profundo para determinar el plan de solución. Frecuentemente, el análisis de un problema requiere enormes esfuerzos. El análisis debe estar orientado hacia las exigencias y para ello es necesario esclarecer la esencia de esas exigencias, es decir, establecer con precisión qué es lo que se necesita encontrar, determinar o hacer en el problema. La habilidad para analizar un problema, para comprender y descifrar su esencia, es el componente más importante en la habilidad general para resolver problemas. ¡Sin hacer el análisis es imposible resolver un problema ¡La escritura esquemática de un problema! Los resultados del análisis preliminar del problema deben ser de alguna manera consignados, fijados. Esa forma compacta, cómoda, clara e ilustrativa de fijar los resultados del análisis se conoce con el nombre de escritura esquemática del problema.

No es obligatorio hacer una escritura esquemática para cada problema. Búsqueda del plan de solución del problema. El análisis del problema y la elaboración de su escritura esquemática son necesarios, fundamentalmente para encontrar el plan de solución. Sobre esta etapa se precisarán más elementos posteriormente. Ejecución del plan de solución. Es la implementación del plan encontrado. Prueba de la solución del problema. Una vez que la solución ha sido ejecutada y descrita, es necesario convencerse de que dicha solución es correcta, de que satisface todos los requerimientos del problema. Investigación del problema. Durante la solución de muchos problemas, además de la prueba, es necesario realizar una investigación del problema, para establecer bajo cuáles condiciones el problema tiene solución y cuántas son las soluciones en cada caso posible; bajo qué condiciones el problema no tiene solución, etc. Formulación de la respuesta al problema.

Una vez convencidos de la exactitud de la solución y, en caso necesario, de haber realizado la investigación del problema, es necesario formular de manera precisa la respuesta al problema. Análisis final de la solución del problema. Con fines cognoscitivos y de aprendizaje, es también útil realizar el análisis final de la solución obtenida, en particular, determinar si no existe otro modo (vía) más racional para resolver el problema, cuáles son las conclusiones que se pueden derivar de la solución, etc. La estructura del proceso de la solución de un problema depende en primer término del carácter del problema mismo y, por supuesto, de cuáles sean los conocimientos y habilidades que posee quien resuelve el problema. Las etapas anteriores no están separadas una de la otra, sino que se entrelazan. En ocasiones el orden de las etapas también puede cambiar. No todas las etapas son obligatorias, está en dependencia de las exigencias del problema y de la preparación de los estudiantes para enfrentar su resolución.

**Modelo de Jungk para la resolución de problemas**

En los Institutos Superiores Pedagógicos de Cuba, en la Didáctica de la Matemática se utiliza para el tratamiento de problemas y ejercicios con texto, el modelo del Dr. Werner Jungk, (denominado programa heurístico general) es empleado también por otros didáctas alemanes como Wolfgang Zillmer y Horst

Müller; consta de las siguientes etapas: Orientación hacia el problema, Trabajo en el problema, Solución del problema y Evaluación de la solución y la vía. (Jungk, 1981, p.111). Por su importancia en el proceso de resolución de problemas, un breve análisis de las acciones principales de cada etapa (Jungk, 1981, p.111). Orientación hacia el problema. Esta etapa comprende la motivación del problema, el planteamiento del problema y comprensión del enunciado del problema. El alumno comprende el enunciado del problema cuando es capaz de reproducirlo con sus propias palabras y analizar cuáles son sus componentes esenciales. Para comprender el enunciado del problema es necesario responder una serie de preguntas: ¿Determinan los datos la solución del problema?, ¿No son suficientes?, ¿Sobran? ¿De qué se trata en el problema?, ¿Qué datos nos dan?, ¿Qué se busca? ¿Determinan los datos la solución del problema?, ¿No son suficientes?, ¿Sobran? ¿Podría proponerse el problema de otra manera?, ¿Puede hacerse un esbozo o gráfico que esclarezca la situación? Trabajo en el problema. En esta etapa se precisa el problema, se analizan los medios, y se busca una idea de solución. El encontrar una idea de solución (o vía de solución) es un proceso de análisis para el cual se pueden sugerir algunas actividades como: -Formular las relaciones entre los datos y la incógnita. -Tratar de relacionar el problema con otro conocido y cuya solución sea más simple o inmediata. -Transformar o introducir una nueva incógnita, acercándola a los datos. -Transformar los datos, obtener (o deducir) nuevos elementos más próximos a la incógnita. -Recordar la solución de ejercicios análogos. -Analizar si se han tenido en cuenta todos los datos. Generalizar el problema, si es posible. -Analizar casos particulares. -Resolver problemas parciales (considerar solo una parte de las condiciones). -Hacer gráficos que ilustren las relaciones encontradas. Como se puede apreciar esta es la etapa principal para la solución de problemas, donde los alumnos deben poner en juego todos los conocimientos y habilidades adquiridos para resolver el problema. Solución del problema. En esta etapa se ejecuta el plan de solución obtenido en la fase anterior y se representa la solución del problema. Este es un proceso de síntesis y se debe fundamentar la corrección de cada paso, realizar los cálculos necesarios, resolver ecuaciones, simplificar, transformar expresiones, etc. Evaluación de la solución y la vía. Esta etapa comprende la comprobación de la solución, la determinación del número de soluciones, se señalan casos especiales, posibilidad de transferir la vía de solución a otros ejercicios. En esta etapa es necesario plantearse preguntas como las siguientes: ¿Es lógico el resultado?, ¿Por qué?, ¿Es posible comprobar la solución?, ¿Cómo?, ¿Es posible resolver el problema por una vía más corta?, ¿Qué otro resultado se puede obtener por esta vía? Estas ideas constituyen una sucesión de indicaciones que ayudan a reflexionar, a buscar los medios matemáticos y la idea de solución.

**Modelo de Miguel de Guzmán para la resolución de problemas.**

El modelo de Miguel de Guzmán (1991), sobre las cuatro fases de Polya, orienta y anima al resolutor en los siguientes aspectos:

**1. Familiarízate con el problema.**

- Trata de entender a fondo la situación.
- Con paz, con tranquilidad, a tu ritmo.
- Juega con la situación, enmárcala, trata de determinar el aire del problema, piérdele el miedo.

2. **Búsqueda de estrategias.**

- Empieza por lo fácil.
- Experimenta.
- Hazte un esquema semejante, una figura, un diagrama.
- Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada.
- Busca un problema semejante.
- Inducción.
- Supongamos el problema resuelto.
- Supongamos que no.

**3. Lleva adelante tu estrategia.**

- Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se hayan ocurrido en la fase anterior.

- Actúa con flexibilidad. No te arrugues fácilmente. No te emperres en una idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía.
- ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución**.**

**4. Revisa el proceso y saca consecuencias de él.**

- Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? O bien, ¿Por qué no llegaste?
- Trata de entender no solo que la cosa funciona, sino por qué funciona.
- Mira si encuentras un camino más simple.
- Mira hasta donde llega el método.
- Reflexione sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro. Vuelva a analizar el Video del Inicio de la Actividad 1 de este tema y valore después de haber estudiado los diferentes modelos de resolución de problemas si el docente utilizó algunos de ellos. ¿Cuál le propondría utilizar?
- Envíe a su profesor las propuestas realizadas.

**Estrategias heurísticas:** Dentro del modelo de resolución de problemas elegido, para cada una de las fases se sugieren una serie de heurísticos que sirven de guía en el proceso, ya que ayudan al alumno a aproximarse, comprender el problema y a ordenar eficientemente sus recursos para resolverlo.

Según la RAE, 2012, se entiende por heurístico lo siguiente: "Técnica de la indagación y del descubrimiento. En algunas ciencias, manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas, etc."

Constituyen una serie de sugerencias concretas encuadradas en el proceso general de resolución de problemas que ayudan al alumno a desarrollar habilidades y actitudes positivas en el proceso. Las actividades sugeridas son usadas cuando necesitan comprender una situación o hacer progresos hacia la solución o analizar el proceso seguido.

Con ello se pretende ayudarles a descubrir su propio estilo, sus capacidades y sus limitaciones, pero diseñando actividades que favorezcan hábitos de resolución.

Sería conveniente, además del diseño de estrategias propias, comprender y evaluar estrategias de resolución de problemas de otros, demostrando respeto hacia el trabajo de los compañeros.

Las principales estrategias son: (Minedu 2013 p. 29)

- Hacer la simulación. Consiste en representar el problema de forma vivencial mediante una dramatización o con material concreto y de esa manera hallar la solución.
- Organizar la información mediante diagramas, gráficos, esquemas, tablas, figuras, croquis, para visualizar la situación. En estos diagramas, se deben incorporar los datos relevantes y eliminar la información innecesaria. De esta forma el estudiante podrá visualizar las relaciones entre los elementos que intervienen en un problema.
- Buscar problemas relacionados o parecidos que haya resuelto antes. El niño puede buscar semejanzas con otros problemas, casos, juegos, etc., que ya haya resuelto anteriormente. Se pueden realizar preguntas como: "¿A qué nos recuerda este problema?" o "¿Es como aquella otra situación?".
- Buscar patrones. Consiste en encontrar regularidades en los datos del problema y usarlas en la solución de problemas.
- Ensayo y error. Consiste en seleccionar algunos valores y probar si alguno puede ser la solución del problema. Si se comprueba que un valor cumple con todas las condiciones del problema, se habrá hallado la solución; de otra forma, se continúa con el proceso.
- Usar analogías. Implica comparar o relacionar los datos o elementos de un problema, generando razonamientos para encontrar la solución por semejanzas.
- Empezar por el final. Esta estrategia se puede aplicar en la resolución de problemas en los que conocemos el resultado final del cual se partirá para hallar el valor inicial.
- Plantear directamente una operación. Esta estrategia se puede aplicar en la resolución de problemas cuya estructura aritmética sea clara o de fácil comprensión para el estudiante.

**Competencias matemáticas**

La competencia matemática es un saber actuar en un contexto particular, que nos permite resolver situaciones problemáticas reales o de contexto matemático. Un actuar pertinente a las características de la situación y a la finalidad de nuestra acción, que selecciona y moviliza una diversidad de saberes propios o de recursos del entorno. Eso se da mediante determinados criterios básicos, como:

a) Saber actuar: Alude a la intervención de una persona sobre una situación problemática determinada para resolverla, pudiendo tratarse de una acción que implique sólo actividad matemática.
b) Tener un contexto particular: Alude a una situación problemática real o simulada, pero plausible, que establezca ciertas condiciones y parámetros a la acción humana y que deben tomarse en cuenta necesariamente.
c) Actuar pertinentemente: Alude a la indispensable correspondencia de la acción con la naturaleza del contexto en el que se interviene para resolver la situación problemática. Una acción estereotipada que se reitera en toda situación problemática no es una acción pertinente.
d) Seleccionar y movilizar saberes: Alude a una acción que echa mano de los conocimientos matemáticos, habilidades y de cualquier otra capacidad matemática que le sea más necesaria para realizar la acción y resolver la situación problemática que enfrenta.
e) Utilizar recursos del entorno: Alude a una acción que puede hacer uso pertinente y hábil de toda clase de medios o herramientas externas, en la medida que el contexto y la finalidad de resolver la situación problemática lo justifiquen.
f) Utilizar procedimientos basados en criterios: Alude a formas de proceder que necesitan exhibir determinadas características, no todas las deseables o posibles sino aquellas consideradas más esenciales o suficientes para que logren validez y efectividad. (MINEDU 2013 p. 19)

**Las competencias son:**

Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad, que implica desarrollar modelos de solución numérica, comprendiendo el sentido numérico y de magnitud, la construcción del significado de las operaciones, así como la aplicación de diversas estrategias de cálculo y estimación al resolver un problema.

Esta competencia se desarrolla a través de las cuatro capacidades matemáticas las que se interrelacionan para manifestar formas de actuar y pensar en el estudiante. Esto involucra la comprensión del significado de los números y sus diferentes representaciones, propiedades y relaciones, así como el significado de las operaciones y cómo estas se relacionan al utilizarlas en contextos diversos. Estas capacidades de la competencia son:

- Matematiza situaciones: Expresar problemas diversos en modelos matemáticos relacionados con los números y operaciones.
- Comunica y representa ideas matemáticas: Expresar el significado de los números y operaciones de manera oral y escrita, haciendo uso de diferentes representaciones y lenguaje matemático.
- Elabora y usa estrategias: Planificar, ejecutar y valorar estrategias heurísticas, procedimientos de cálculo, comparación, estimación, usando diversos recursos para resolver problemas.
- Razona y argumenta generando ideas matemáticas: Justificar y validar conclusiones, supuestos, conjeturas e hipótesis respaldados en significados y propiedades de los números y operaciones. (MINEDU, 2015 p. 19,20)

**Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio:** implica desarrollar progresivamente la interpretación y generalización de patrones, la comprensión y el uso de igualdades y desigualdades, y la comprensión y el uso de relaciones y funciones. Toda esta comprensión se logra usando el lenguaje algebraico como una herramienta de modelación de distintas situaciones de la vida real.

Esta competencia se desarrolla a través de las cuatro capacidades matemáticas, que se interrelacionan para manifestar formas de actuar y pensar en el estudiante, esto involucra desarrollar modelos expresando un lenguaje algebraico, emplear esquemas de representación para reconocer las relaciones entre datos, de tal forma que se reconozca un regla de formación, condiciones de equivalencia o relaciones de dependencia, emplear procedimientos algebraicos y estrategias heurísticas para resolver problemas, así como expresar formas de razonamientos que generalizan propiedades y expresiones algebraicas.

Estas capacidades de la competencia son:

- Matematiza situaciones: asociar problemas diversos con modelos que involucran patrones, igualdades, desigualdades y relaciones.
- Comunica y representa ideas matemáticas: Expresar el significado de patrones, igualdades, desigualdades y relaciones de manera oral y escrita, haciendo uso de diferentes representaciones y lenguaje matemático.
- Elabora y usa estrategias: Planificar, ejecutar y valorar estrategias heurísticas, procedimientos de cálculo, comparación, estimación, usando diversos recursos para resolver problemas.
- Razona y argumenta generando ideas matemáticas: Justificar y validar conclusiones, supuestos, conjeturas e hipótesis respaldados en leyes que rigen patrones, propiedades sobre relaciones de igualdad y desigualdad y las relaciones. (MINEDU, 2015 p. 22)

**Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización**: implica desarrollar progresivamente el sentido de la ubicación en el espacio, la interacción con los objetos, la comprensión de propiedades de las formas y cómo estas se interrelacionan, así como la aplicación de estos conocimientos al resolver diversos problemas.

Esta competencia se desarrolla a través de las cuatro capacidades matemáticas que se interrelacionan para manifestar formas de actuar y pensar en el estudiante, esto involucra desarrollar modelos expresando un lenguaje geométrico, emplear variadas representaciones que describan atributos de forma, medida y localización de figuras y cuerpos geométricos, emplear procedimientos de construcción y medida para resolver problemas, así como expresar formas y propiedades geométricas a partir de razonamientos.

Estas capacidades de la competencia son:

- Matematiza situaciones: Asociar problemas diversos con modelos referidos a propiedades de las formas, localización y movimiento en el espacio.
- Comunica y representa ideas matemáticas: Expresar las propiedades de las formas, localización y movimiento en el espacio, de manera oral o escrita, haciendo uso de diferentes representaciones y lenguaje matemático.
- Elabora y usa estrategias: Planificar, ejecutar y valorar estrategias heurísticas y procedimientos de localización, construcción, medición y estimación, usando diversos recursos para resolver problemas.
- Razona y argumenta generando ideas matemáticas: Justificar y validar conclusiones, supuestos, conjeturas e hipótesis respecto a las propiedades de las formas, sus transformaciones y la localización en el espacio. (MINEDU, 2015 p. 24)

**Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de datos e incertidumbre implica:** desarrollar progresivamente formas cada vez más especializadas de recopilar, y el procesar datos, así como la interpretación y valoración de los datos, y el análisis de situaciones de incertidumbre.

Esta competencia se desarrolla a través de las cuatro capacidades matemáticas que se interrelacionan para manifestar formas de actuar y pensar en el estudiante, esto involucra desarrollar modelos expresando un lenguaje estadístico, emplear variadas representaciones que expresen la organización de datos, usan procedimientos con medidas de tendencia central, dispersión y posición, así como probabilidad en variadas condiciones; por otro lado, se promueven formas de razonamiento basados en la estadística y la probabilidad para la toma de decisiones.

Estas capacidades de la competencia son:

- Matematiza situaciones: Asociar los problemas diversos con modelos estadísticos y probabilísticos.
- Comunica y representa ideas matemáticas: Expresar el significado de conceptos estadísticos y probabilísticos, de manera oral y escrita, haciendo uso de diferentes representaciones y lenguaje matemático.
- Elabora y usa estrategias: Planificar, ejecutar y valorar estrategias heurísticas y procedimientos para la recolección y procesamiento de datos y el análisis de

problemas en situaciones de incertidumbre.

- Razona y argumenta generando ideas matemáticas: Justificar y validar conclusiones, supuestos, conjeturas e hipótesis, respaldados en conceptos estadísticos y probabilísticos (MINEDU, 2015 p. 26,27)

La investigación **se justifica de manera epistemológica** porque busca conocimientos de verdad y contrastables el modelo Polya y su influencia en el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria, de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo 2015

La investigación **se justifica de manera científica** porque busca conocimientos selectivos y sistematizados para explicar racionalmente la influencia del modelo Polya en el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria, de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo 2015

La investigación se **justifica metodológicamente** porque busca desarrollar métodos rigurosos y sistematizados para obtener resultados válidos y confiables en la investigación del modelo Polya y su relación con el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria, de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo 2015.

La investigación **se justifica de manera práctica** porque busca dar una aplicación a los resultados orientados a la resolución de problemas matemáticos y su relación con el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria, de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo 2015.

Es por ello se ha formulado el siguiente **problema**: **¿** De qué manera influye la aplicación de modelo Polya en el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria, de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo 2015?

**En cuanto a la conceptuación de las variables, tenemos:**

**Polya:** fue un profesional que propuso el modelo matemático relacionado a la resolución de problemas, que consta de cuatro etapas como: comprender el problema, concebir el plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida.

**Modelo educativo:** es una serie de premisas y conceptos que estructuran la forma en que se imparte educación en un país determinado. El mismo busca obtener una mejora en la captación de conocimientos por parte de los educandos, y de esta manera impactar positivamente a la sociedad. Asimismo, puede ser una recopilación o síntesis de distintas teorías y enfoques pedagógicos, que orientan a los docentes en la elaboración de los programas de estudios y en la sistematización del proceso de enseñanza y aprendizaje.

**Competencia**: a la facultad que tiene una persona para actuar conscientemente en la resolución de un problema o el cumplimiento de exigencias complejas, usando flexible y creativamente sus conocimientos y habilidades, información o herramientas, así como sus valores, emociones y actitudes.

**Problema**: es una situación donde se presenta una incógnita o interrogante que el estudiante tiene que dar solución aplicando conceptos o procedimientos y habilidades matemáticas.

**Estrategia:** viene a ser conjunto de técnicas que ayudan para mejorar el proceso aprendizaje y el logro de las competencias.

**Heurística:** La heurística trata de la resolución de problemas aplicando soluciones parciales, a menudo intuidas. Se evalúan los resultados intermedios obtenidos para aproximarse poco a poco al resultado o solución final. También se aplican atajos que funcionan, aunque no se sepa exactamente por qué. Es el arte del descubrimiento. Existen estrategias, reglas y silogismos que ayudan a encontrar soluciones heurísticas

**Estudiante:** es la persona que realiza sus estudios en una institución educativa

**Educación Primaria:** es el segundo nivel del sistema educativo peruano, dura seis años, promueve una formación integral incluyendo todas las áreas de desarrollo personal.

Para llevar a cabo la presente investigación se planteó la siguiente **hipótesis:** La aplicación del modelo Polya influye positivamente en el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria, de la Institución

Educativa Publica N° 86651 de Ongo 2015

El **objetivo general** de la investigación que se planteó es**:**

Determinar la influencia de la aplicación del modelo Polya en el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Publica N° 86651 de Ongo 2015.

Asimismo, se consideró los siguientes objetivos específicos de la investigación:

- Determinar el nivel de logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Publica N° 86651 de Ongo 2015 antes de la aplicación del modelo Polya centrado en la resolución de problemas.
- Determinar el nivel de logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Publica N° 86651 de Ongo 2015 después de la aplicación del modelo Polya centrado en la resolución de problemas.

## II. Metodología del Trabajo

El tipo de investigación es cuantitativo y el diseño de investigación que se utilizó es el pre experimental de pre test y post test con un solo grupo de estudio.

**G** $O_1$ **--------- X---------**$O_2$

**Donde**:

G: Grupo de estudio

$O_1$ : Pre test o medición previa.

X : Variable independiente o experimental

$O_2$ : Post test o medición posterior.

**La población y muestra** estuvo conformado por 14 estudiantes de ambos sexos del IV Ciclo de educación primaria distribuidos en un aula, de la Institución Educativa N° 86651 de Ongo - Yungay, matriculados en el año académico 2015.

**Técnicas e instrumentos de investigación**

Las técnicas que se utilizaron en el presente trabajo de investigación son: observación, entrevista, encuesta.

Los instrumentos que utilizaron son: lista de cotejo, guía de entrevista, cuestionario.

**Procesamiento y análisis de la información**

Para el procesamiento y análisis de datos estadísticos se utilizó la hoja de cálculos (Excel) y el software correspondiente fue IBM SPSS v25.

## III. Resultados

### TABLA N° 1

**Diferencias observadas entre el pre y post test de los estudiantes de 3° y 4° de la institución educativa N° 86651 de Ongo en la aplicación del modelo Polya**

| DIFERENCIA ENTRE POST - PRE | N° | % |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 21.4 |
| 4 | 6 | 42.9 |
| 6 | 3 | 21.4 |
| 8 | 1 | 7.1 |
| 10 | 1 | 7.1 |
| **TOTAL** | 14 | 99.9 |

**TABLA DE PROMEDIO DE LAS DIFERENCIAS**

| | |
|---|---|
| **Promedio** | **4.7** |
| **Diferencia entre el Post test y Pre test** | **2.3** |

| | | |
|---|---|---|
| **Prueba de homogeneidad de medias** | **t = 7.664** | |
| **Prueba de la Normalidad (Shapiro- Wilk)** | **α= 2.67** | **Ver/anexo/N° 04** |

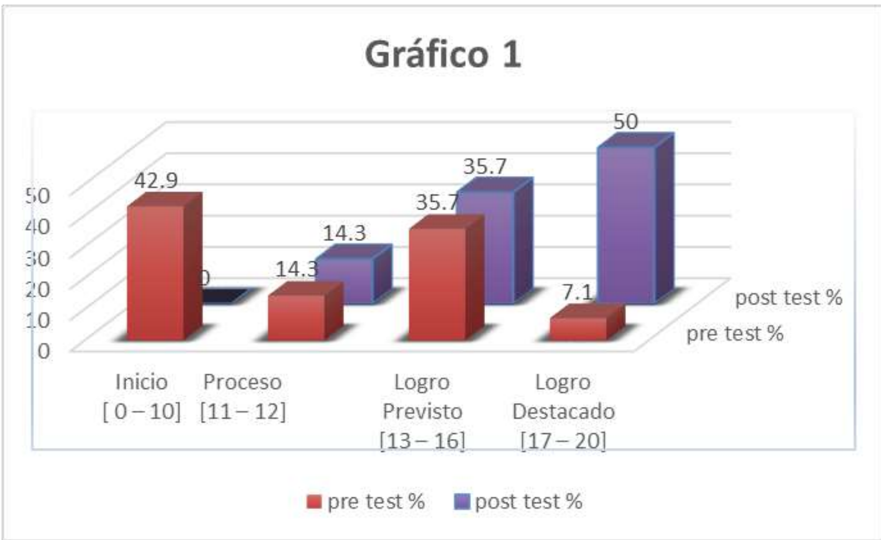

Los datos de la tabla N° 1 y del gráfico N° 1 muestran las diferencias observadas entre el pre y post test de los estudiantes de 3° y 4°, de un total de 14 estudiantes, 3 obtuvieron un incremento de 2 puntos que representa el 21.4%; 6 estudiantes lograron ascender 4 puntos que representa el 42.9%; 3 estudiantes obtuvieron un incremento de 6 puntos que representa el 21.4%, 1 estudiante logró una diferencia de 8 puntos que equivale a 7.1%. Asimismo, 1 estudiante obtuvo una diferencia de 10 puntos que equivalen el 7.1%. Con un promedio de 4.7, deferencia entre el pos test y pre test de 2.3, t =7.664 y p<0.001. Estos datos evidencian que hubo un avance significativo con la aplicación del modelo Polya en la resolución de problemas y en logro de las competencias matemáticas.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos sobre los efectos de la aplicación del modelo Polya en el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Publica N° 86651 de Ongo 2015, en las pruebas de pre test y post test, asimismo en la Tabla 1, Tabla 2, se muestran los datos, así como los resultados.

**Tabla N° 2**
**Calificaciones de los estudiantes de 3° y 4° de la institución educativa N° 86651 de Ongo en las fases pre y post test en la aplicación del modelo Polya.**

| Calificaciones | | pre test | | post test | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **N°** | **%** | **N°** | **%** |
| En Inicio | [ 0 – 10] | 6 | 42.9 | 0 | 0 |
| En Proceso | [11 – 12] | 2 | 14.3 | 2 | 14.3 |
| Logro Previsto | [13 – 16] | 5 | 35.7 | 5 | 35.7 |
| Logro Destacado | [17 – 20] | 1 | 7.1 | 7 | 50.0 |
| **total** | | 14 | 100.0 | 14 | 100.0 |

| | | |
|---|---|---|
| **Promedio** | 12.0 | 16.7 |
| **Desviación Estadística** | 3.8 | 2.9 |




Como se observa en la Tabla N° 2, y grafico N° 2 de 14 estudiantes evaluados de la institución educativa Pública N° 86651 de Ongo, en el nivel de logro **En Inicio,** de 0 – 10, 6 estudiantes que constituye el 42.9% en el pre test se ha reducido a 0.0% en el post test. En el nivel de logro **En proceso** de 11 - 12 se mantiene el porcentaje tanto en pre test como en el post test con 14.3%. Asimismo, en el nivel de **Logro Previsto** de 13 - 16 también se mantiene con 35.7% en el pre test como en el post test. Finalmente, en el nivel de **logro destacado** de 17 – 20 ha mejorado de un 7.1 % en el pre test a 50.0 % en el post test. Asimismo, el promedio de 12.0% en el pre test se incrementó a 16.7% en el post test. Estos datos evidencian que, la aplicación del modelo Polya mejora notablemente en el logro de las competencias matemáticas en el nivel de Educación Primaria.

# IV. Análisis y discusión

El objetivo general de la investigación buscó determinar los efectos de la aplicación del modelo Polya en el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo 2015.

En la tabla N° 1 y gráfico N° 1 se demuestra que la aplicación del modelo Polya mejoró el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de la Institución Educativa. Asimismo, en la tabla y gráfico N° 2 observamos las diferencias entre el pre y post test de los estudiantes de 3° y 4°, donde hubo un avance significativo en las calificaciones.

Escalante (2015) señala que el método Pólya dentro de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática refleja una respuesta significativa y efectiva en el aprendizaje, porque al finalizar la investigación se obtuvo una media aritmética de 88.48 puntos calificación que se compara con los 62.2 que fue la media aritmética obtenida por los estudiantes en la evaluación diagnóstica.

Coincide con el estudio realizado el Modelo Polya utilizando una prueba de hipótesis para la diferencia de medias (ver anexo 04: $\alpha$=0.00) y las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo 2015 porque se observa un logro significativo. Los estudiantes han pasado de una escala de calificación a otra. De la escala de calificación **en inicio** de 42.9% en pre test se redujo a 0% en el post test y en **logro destacado** se ha incrementado de 7.1% en pre test a 50% en el post test. También, en Bastiand (2012) se observa que, en la prueba de comprensión de lectura, los alumnos se ubican en un nivel de “logro previsto” con una nota de 13.8; en comprensión literal, también se ubican en un nivel de “logro previsto” con una nota de 14.8, y de la misma manera, en comprensión inferencial, con una nota de 13. Bahamonde y Vicuña (2011) se observa que la totalidad de los cursos presentan variaciones positivas, lo que traduce en un avance en cada una de las variables. Específicamente en la variable comprensión de los problemas se observa que incrementa el porcentaje en cada uno de los grupos: en el primero básico 67,7%, asimismo en el tercero básico 61,8%.

Martinez (2012) señala que la estrategia que más utilizaron los niños en la resolución de los problemas de estructura aditiva fue el uso adecuado del algoritmo 64%, seguida de uso equivocado del algoritmo 14%; la estrategia del complemento que era una de las privilegiadas en la primera etapa, pasó a ser una de las menos utilizadas 9%; dos estrategias que no tuvieron en la primera etapa, surgieron en ésta: uso del cálculo mental 4% y otra 9%. A partir de los porcentajes obtenidos se observa que la mayoría de los niños se han apropiado del uso adecuado del algoritmo y los que no, siguen en proceso de consolidación.

# V. Conclusiones y Recomendaciones

## Conclusiones

### General

La aplicación del modelo Polya influye positivamente en el logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo 2015, así lo expresan los resultados de las tablas N° 1 y 2.

### Específicos

- El nivel de logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo 2015 antes de la aplicación del modelo Polya centrado en la resolución de problemas que en el nivel de logro destacado se obtuvo un 7.1% (Tabla N°1)
- Se determinó el nivel de logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo 2015 después de la aplicación del modelo Polya centrado en la resolución de problemas que en el nivel de logro destacado se obtuvo el 50% (Tabla N°2)
- Se denotan cambios sustantivos en el nivel de logro de las competencias matemáticas de los estudiantes de IV ciclo de Educación Primaria de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo, después de aplicar el modelo Polya centrado en la resolución de problemas.

## Recomendaciones

- A las autoridades de la Unidad de Gestión Educativa Local de Yungay, realizar capacitaciones a los docentes sobre el Modelo Polya para el desarrollo de las sesiones de enseñanza aprendizaje en el Área de Matemática.
- A los directores de las instituciones educativas realizar convenios con instituciones aliadas que permitan la capacitación de los docentes para la

implementación del modelo Polya para mejorar progresivamente la resolución de problemas.

- Propiciar que los docentes en las aulas apliquen el modelo Polya para mejorar la resolución de los problemas matemáticos

## VI. Agradecimiento

A los docentes de la universidad San Pedro por sus profundas y sabias orientaciones durante los dos ciclos de estudios, encaminándome hacia la superación y el logro de mis objetivos propuestos.

A la señora directora de la Institución Educativa Pública N° 86651 de Ongo-Yungay por su apoyo incondicional y por las facilidades brindadas en la aplicación de mi trabajo de investigación.

## VII. **Referencias bibliográficas**

Alfaro C, (2006) *Las ideas de Pólya en la resolución de problemas*. Revista: Universidad Nacional.

Aluja Banet, Tomás y Morineau Alain (1999) Aprender de los datos: el Análisis de Componentes Principales. EUB. Barcelona.

Bécue M. (2009) Manual de introducción a los métodos factoriales y clasificación con SPAD. Servei d'Estadística UAB, Barcelona.

Bernal C. (2010) *Metodología de la investigación.* Colombia. Pearson Educación

Calleja S. (2012) *Solución de problemas a través del descubrimiento método de George Polya*. Puebla. Tesis: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Educantabria. *Estrategias Heurísticas*. http://portaleducativo.educantabria.es/web/pcm/19

Escalante S. (2014) *Método Pólya en la resolución de problemas matemáticos*. Quetzaltenango. Tesis: Universidad Rafael Landívar.

Escofier Brigitte, Pagès Jerôme (1992) Análisis factoriales simples y múltiples. Universidad del País Vasco. Bilbao.

Hernandez R., Fernandez C. y Baptista P. (2010) *Metodología de la Investigación*. México. The McGraw-Hill Companies.

Lebart, Morineau y Fénelon (1985) Tratamiento Estadístico de Datos. Barcelona Ed. Marcombo. Boixareu Editores.

Martínez C. (2012) *Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de primaria*. México. Tesis: Universidad Pedagógica Nacional.

Martínez M (2012) *Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de Educación Primaria*. México. Tesis: Universidad Pedagógica Nacional.

Ministerio de Educación. (2013) *Rutas de Aprendizaje ¿Qué y cómo aprenden matemática nuestros niños y niñas? Fascículo 1 Números y operaciones, cambio y relaciones IV y V ciclo Tercer grado al sexto grado de Educación Primaria*. Lima.

Ministerio de Educación. (2013) *Rutas de Aprendizaje Hacer uso de saberes matemáticos para afrontar desafíos diversos. Fascículo General 2*. Lima.

Ministerio de Educación. (2015) *Rutas de Aprendizaje ¿Qué y cómo aprenden nuestros niños y niñas? IV ciclo de Área Curricular Matemática*. Lima.

Polya G. (1989) *Cómo plantear y Resolver problemas*. México. Editorial Trillas

Rodriguez M. *Modelos para trabajar los problemas. Chile. http://www.rmm.cl/index_sub3.php?id_contenido=11964&id_seccion=4241&id_portal=635*

Vahamonde S. y Vicuña J. (2011) *Resolución de problemas matemáticos*. Chile. Tesis: Universidad de Magallanes.

## VIII. Anexos

### Anexo 01 Instrumento de Recolección de Datos

### EVALUACIÓN DE ENTRADA – AREA MATEMÁTICA

Alumno(a): ___________________________________________________________

GRADO: 3° Y 4°                    Fecha: ___________

**INSTRUCCIÓN**. A continuación, se te presentan una serie de problemas las cuales tendrás que responder en forma correcta.

1. Josefina tiene 32 gallinas, de las cuales 15 son ponedoras. ¿Cuántas no lo son?
   A. 19
   B. 21
   C. 20
   D. 17

2. Zoila compró un 1 kilogramo de maíz que le costó 5 soles y un litro de aceite a 6 soles. ¿Cuánto es su vuelto si paga con un billete de 20 nuevos soles?
   A. 11 soles
   B. 9 soles
   C. 12 soles
   D. 8 soles

3. Einer y Delia son hermanos y viven en la localidad de Ongo, un día salen al campo a recoger choclos, al llegar a casa, Einer entrega a su mamá 65 choclos y Delia entrega 17 choclos menos que Einer ¿Cuál es la cantidad de choclos que entrega Delia?
   A. 17 choclos
   B. 82 choclos
   C. 48 choclos
   D. 65 choclos

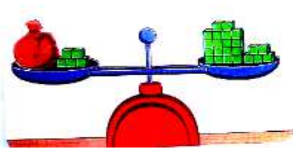
4. De los 200 kg de papa que cosechó Yulisa, 80 kg fue de variedad Yungaina y el resto, fue de Huayro ¿Cuántos kg de papa huayro cosechó Yulisa?
   A. 280 kg.
   B. 120 kg
   C. 200 kg.
   D. 180 kg.

5. Teresa tiene 450 juguetes y los quiere colocar en 9 cajas de cartón. ¿Cuántos juguetes pondrá en cada caja?

A. 45 juguetes
B. 70 juguetes
C. 50 juguetes
D. 55 juguetes

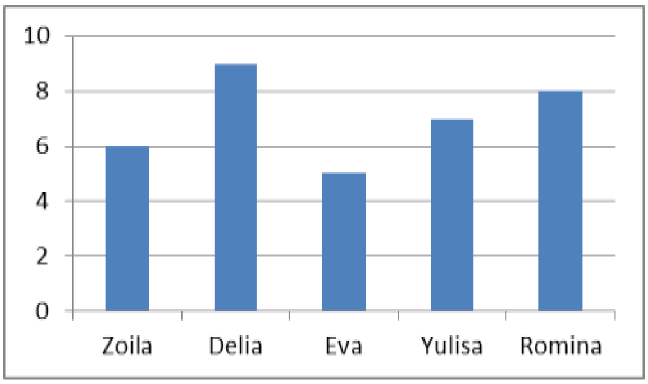
6. El terreno de Delia tiene forma rectangular, su largo mide 20 metros y su ancho mide 8 metros ¿Cuánto medirá su área o superficie?
   A. 28 metros cuadrados
   B. 160 metros cuadrados
   C. 56 metros
   D. 12 metros

7. A José le encanta experimentar con la balanza. Esta vez, puso cubitos del mismo tamaño y peso en una bolsa y en los platillos, de manera que la balanza quedó equilibrada. ¿Cuántos cubitos crees que hay en la bolsa?
   A. 10 cubitos.
   B. 18 cubitos.
   C. 23 cubitos.
   D. 28 cubitos.



8. Santiago fue al médico porque estaba con fiebre y el médico le indicó a tomar 2 cucharaditas de jarabe 3 veces al día durante 4 días ¿Cuántas cucharaditas de jarabe tomará en total?
   A. 9 cucharaditas
   B. 24 cucharadas
   C. 20 cucharadas
   D. 12 cucharadas

9. En el aula de tercer y cuarto grado Delia y sus amigas juegan a ser candidatas del Municipio Escolar. En el gráfico de barras se presentan los resultados de la votación. ¿Cuáles son las dos candidatas que obtuvieron mayor votación?




**Marca la alternativa correcta:**
   A. Yulisa y Romina
   B. Zoila y Eva
   C. Delia y Romina
   D. Zoila y Delia

**10.** ¿De qué color deberían ser las bolitas de un frasco para poder decir: **"es seguro**

**que salga una bolita roja"?**

A. Bolitas amarillas
B. Bolitas negras
C. Bolitas rojas
D. Bolitas blancas

**Anexo 02**

**EVALUACIÓN DE SALIDA – AREA MATEMÁTICA**

Alumno(a): ______________________________________________________

GRADO: 3° Y 4°     Fecha: ___________

**INSTRUCCIÓN**. A continuación, se te presentan una serie de problemas las cuales tendrás que responder en forma correcta.

1. Josefina tiene 32 gallinas, de las cuales 15 son ponedoras. ¿Cuántas no lo son?
   A. 19
   B. 21
   C. 20
   D. 17

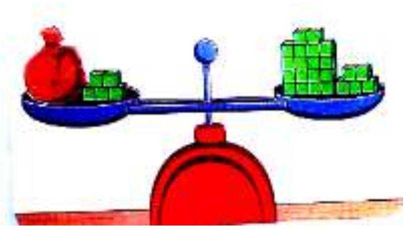
2. Zoila compró un 1 kilogramo de maíz que le costó 5 soles y un litro de aceite a 6 soles. ¿Cuánto es su vuelto si paga con un billete de 20 nuevos soles?
   A. 11 soles
   B. 9 soles
   C. 12 soles
   D. 8 soles

3. Einer y Delia son hermanos y viven en la localidad de Ongo, un día salen al campo a recoger choclos, al llegar a casa, Einer entrega a su mamá 65 choclos y Delia entrega 17 choclos menos que Einer ¿Cuál es la cantidad de choclos que entrega Delia?
   A. 17 choclos
   B. 82 choclos
   C. 48 choclos
   D. 65 choclos

4. De los 200 kg de papa que cosechó Yulisa, 80 kg fue de variedad Yungaina y el resto, fue de Huayro ¿Cuántos kg de papa huayro cosechó Yulisa?
   A. 280 kg.
   B. 120 kg
   C. 200 kg.
   D. 180 kg.

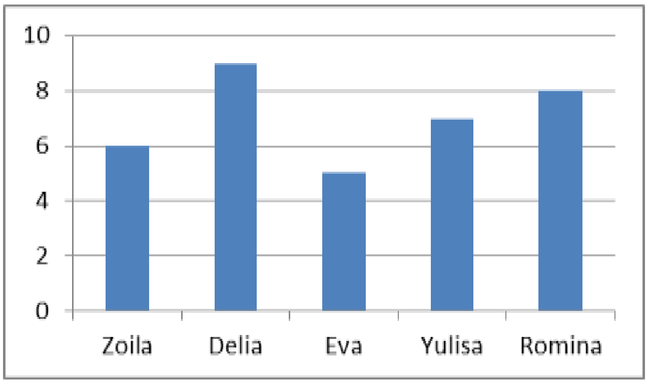
5. Teresa tiene 450 juguetes y los quiere colocar en 9 cajas de cartón. ¿Cuántos juguetes pondrá en cada caja?
   A. 45 juguetes
   B. 70 juguetes
   C. 50 juguetes
   D. 55 juguetes

6. El terreno de Delia tiene forma rectangular, su largo mide 20 metros y su ancho mide 8 metros ¿Cuánto medirá su área o superficie?
   A. 28 metros cuadrados
   B. 160 metros cuadrados
   C. 56 metros
   D. 12 metros
7. A José le encanta experimentar con la balanza. Esta vez, puso cubitos del mismo tamaño y peso en una bolsa y en los platillos, de manera que la balanza quedó equilibrada. ¿Cuántos cubitos crees que hay en la bolsa?
   A. 10 cubitos.
   B. 18 cubitos.
   C. 23 cubitos.
   D. 28 cubitos.



8. Santiago fue al médico porque estaba con fiebre y el médico le indicó a tomar 2 cucharaditas de jarabe 3 veces al día durante 4 días ¿Cuántas cucharaditas de jarabe tomará en total?
   A. 9 cucharaditas
   B. 24 cucharadas
   C. 20 cucharadas
   D. 12 cucharadas

9. En el aula de tercer y cuarto grado Delia y sus amigas juegan a ser candidatas del Municipio Escolar. En el gráfico de barras se presentan los resultados de la votación. ¿Cuáles son las dos candidatas que obtuvieron mayor votación?




**Marca la alternativa correcta:**
   A. Yulisa y Romina
   B. Zoila y Eva
   C. Delia y Romina
   D. Zoila y Delia

10. ¿De qué color deberían ser las bolitas de un frasco para poder decir: **“es seguro que salga una bolita roja”?**
   A. Bolitas amarillas
   B. Bolitas negras
   C. Bolitas rojas
   D. Bolitas blancas

## Anexo N° 03

## LISTA DE COTEJO PARA EVALUAR LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA

Estudiante: ____________________________________________

Instrucciones: marque ✓ en Sí, si el estudiante muestra el criterio, marque ✓ en No, si el estudiante no muestra el criterio.

| Criterio | | Sí | No |
|---|---|---|---|
| **Comprensión del problema** | 1. Entiende qué es lo que debe averiguar | | |
| | 2. Establece cuáles son los datos del problema | | |
| | 3. Representa el problema a través de gráficos, diagramas y símbolos. | | |
| **Concebir o idear un plan** | 4. Selecciona los pasos a seguir | | |
| | 5. Utiliza conocimientos previos relacionados con del problema | | |
| | 6. Selecciona estrategias heurísticas (simplifica el problema, detecta estructuras equivalentes) | | |
| | 7. Plantea el problema de otra forma | | |
| **Ejecuta el plan** | 8. Revisa cada paso que realiza en cada problema | | |
| | 9. Realiza el procedimiento correcto | | |
| | 10. Busca varias alternativas para resolver cada problema | | |
| | 11. Resuelve correctamente la operación. | | |
| **Verifica los resultados** | 12. Busca resolver el problema de modo diferente y compara los resultados. | | |
| | 13. Observa si el resultado obtenido es coherente con los datos del problema | | |
| | 14. Verifica cada uno de los pasos que ha efectuado | | |
| | 15. Utiliza el resultado obtenido y el proceso que has seguido para formular y plantear nuevos problemas | | |

## Anexo N° 04

### Pruebas de normalidad

| | Shapiro-Wilk | | |
|---|---|---|---|
| | Estadístico | gl | Sig. |
| Puntaje | ,926 | 14 | ,267 |

a. Corrección de significación de Lilliefors

**Interpretación**: El nivel de significancia 0,267 es mayor del 0,05 por lo tanto existe normalidad.

**INTERPRETACIÓN:** observamos que el valor de significancia es igual a 0.267 lo que indica que es mayor al 0.05 lo que podemos decir que si es normal

### Prueba de muestras dependientes

| | | PRUEBA DE LEVENE DE CALIDAD DE VARIANZAS | |
|---|---|---|---|
| | | F | Sig. |
| Puntaje | Se asumen varianzas iguales | ,319 | ,577 |
| | No se asumen varianzas iguales | | |

**INTERPRETACIÓN:** observamos que el valor de significancia es igual a 0.0.557 lo que indica que es mayor al 0.05 lo que podemos decir que si es homocedastico (Varianzas iguales al 95% de confianza)

## Anexo N° 05

## Análisis de fiabilidad del instrumento:

**EL MODELO POLYA Y LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES DE IV CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PÚBLICA N° 86651 DE ONGO 2015**

$$\alpha = \frac{K}{K-1}\left|1 - \frac{\Sigma Var}{VarTotal}\right|$$

## Escala

**Resumen del procesamiento de los casos**

| | | N | % |
|---|---|---|---|
| Casos | Válidos | 14 | 100,0 |
| | Excluidos | 0 | ,0 |
| | Total | 14 | 100,0 |

**Estadísticos de fiabilidad**

| Alfa de Cronbach | N de elementos |
|---|---|
| ,811 | 10 |

**Interpretación:** Observamos que el estadístico alpha de cronbach es de **0.811** y es mayor de 0.800 lo cual indica que el instrumento de investigación es confiable o fiable y produce resultados consistentes cuando se aplica en diferentes ocasiones (estabilidad o reproducibilidad (replica)).

**Anexo N° 06**

**Evaluación de expertos**

**Título del Proyecto: EL MODELO POLYA Y LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES DE IV CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PÚBLICA N° 86651 DE ONGO 2015**

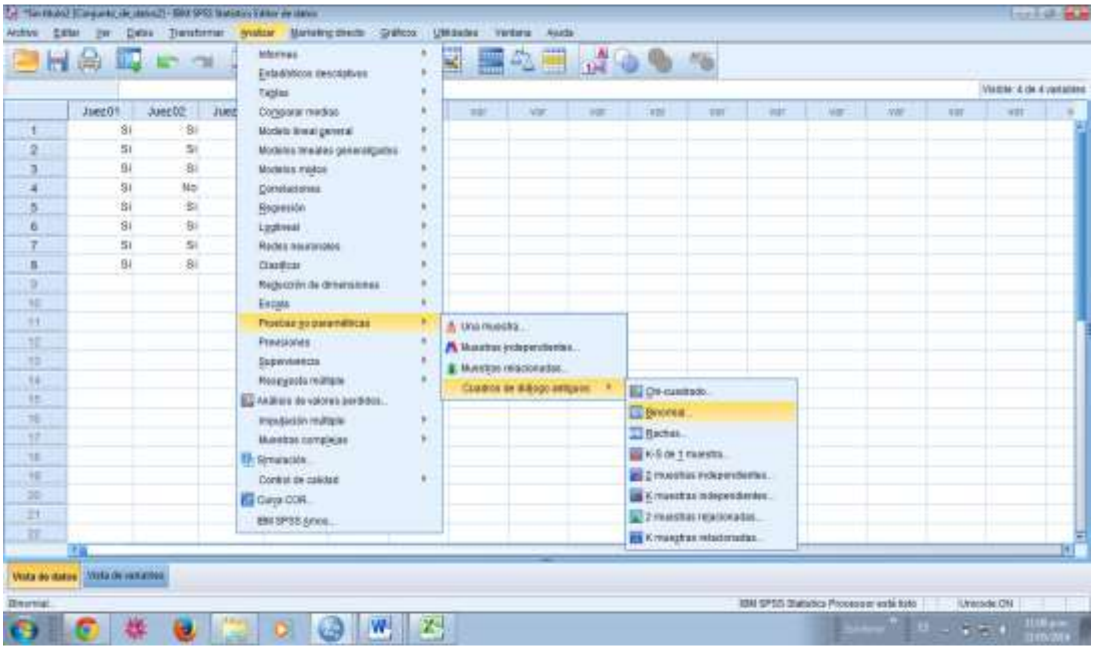
| ASPECTOS | SI | NO | OBSERVACIONES |
|---|---|---|---|
| 1. El instrumento persigue los fines del objetivo general. | | | |
| 2. El instrumento persigue los fines de los objetivos específicos. | | | |
| 3. La hipótesis es atingente al problema y a los objetivos planteados. | | | |
| 4. Los ítems que cubre cada dimensión es el correcto. | | | |
| 5. El número de ítems que cubre cada dimensión es el correcto. | | | |
| 6. Los ítems despiertan ambigüedades en el entrevistado. | | | |
| 7. El instrumento a aplicarse llega a la comprobación de hipótesis. | | | |
| 8. La hipótesis está formulada correctamente. | | | |

**PUNTUACIÓN:**

**SI : De acuerdo**

**NO : En Desacuerdo**

## Evaluación en el software SPSS v 25



**Cuadro N°01**.-Validez por juicio de expertos mediante el ensayo binomial

**Resumen de contrastes de hipótesis**

| | Hipótesis nula | Prueba | Sig. | Decisión |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Las categorías definidas por Juez 01 = De Acuerdo y En Desacuerdo se producen con probabilidades 0,5 y 0,5. | Prueba binomial para una muestra | ,070[1] | Conserve la hipótesis nula. |
| 2 | Las categorías definidas por Juez 02 = De Acuerdo y En Desacuerdo se producen con probabilidades 0,5 y 0,5. | Prueba binomial para una muestra | ,070[1] | Conserve la hipótesis nula. |
| 3 | Las categorías definidas por Juez 03 se producen con las probabilidades especificadas. | Prueba binomial para una muestra | ,008[1] | Rechace la hipótesis nula. |
| 4 | Las categorías definidas por Juez 04 se producen con las probabilidades especificadas. | Prueba binomial para una muestra | ,008[1] | Rechace la hipótesis nula. |

**Conclusión:**

Como $P_{\text{promedio de Significancia}} = 0.035$ es $< 0.05$,

Lo que demuestra el instrumento realmente mide lo que pretende medir y que el instrumento de observación es válido.

## Anexo N° 07

$\mu_1$: media de la muestra 1
$\mu_2$: media de la muestra 2
Diferencia: $\mu_1$ - $\mu_2$

### Estadísticas descriptivas

| Muestra | N | Media | Desv.Est. | Error estándar de la media |
|---|---|---|---|---|
| Muestra 1 | 25 | 88.48 | 1.36 | 0.27 |
| Muestra 2 | 14 | 62.22 | 1.56 | 0.42 |

### Prueba de Hipótesis

Hipótesis nula $H_0$: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Hipótesis alterna $H_1$: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

| Valor T | GL | Valor p |
|---|---|---|
| 54.88 | 37 | 0.000 |